Grundlagen der Rechnerarchitektur

Tim Luchterhand, Paul Nykiel (Abgabegruppe 117)

12. Februar 2019

Hinweis: Jede Zahl, bei der keine Basis spezifiziert ist, ist im 10er System zu interpretieren, sofern nicht anders angegeben.

1 Schaltalgebra

1.1

(a) Die Schaltalgebra ist eine Teilmenge der Boolschen Algebra mit einer zweiwertigen Trägermenge. Das heißt es gibt nur zwei möglichen Werte, anstatt beliebig vielen Werten bei einer Boolschen Algebra.

(b) (i) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 \overset{\text{P7}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} \overset{\text{P3}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 \overset{\text{P3}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} \overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} \overset{\text{P5}}{=} \overline{\overline{x_1 + 0} + \overline{x_2 + 0}}$$

(ii) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \overset{\text{P3}}{=} x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2} + \overline{x_1 \cdot x_1} \cdot x_2 \overset{\text{P7}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2} + \overline{x_1 \cdot x_1} \cdot x_2}} \overset{\text{P8'}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{\overline{x_2 \cdot x_2}} \cdot \overline{\overline{x_1 \cdot x_1} \cdot x_2}}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 &\overset{\text{1b}}{=} \overline{\overline{x_1 + 0} + \overline{\overline{x_2} + 0}} + \overline{\overline{\overline{x_1} + 0} + \overline{x_2 + 0}} \\
&\overset{\text{P5', P7}}{=} \overline{\overline{x_1 + 0} + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x_2 + 0}} \\
&\overset{\text{P5', P7}}{=} \overline{\overline{\overline{\overline{x_1 + 0} + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x_2 + 0}}} + 0}
\end{aligned}$$

1.2

(a) Wertetabelle

$2^3 = x_3$	$2^2 = x_2$	$2^1 = x_1$	$2^0 = x_0$	$f(x)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

(b)

$$
\begin{aligned}
f_{\text{DKNF}} &= x_0\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ + \overline{x_0}\ x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}\ + x_0x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}\ + \overline{x_0}\ \overline{x_1}\ x_2\overline{x_3} \\
&+ x_0\overline{x_1}\ x_2\overline{x_3}\ + \overline{x_0}\ x_1x_2\overline{x_3}\ + x_0x_1x_2\overline{x_3}\ + \overline{x_0}\ \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3 \\
&+ x_0x_1\overline{x_2}\ x_3 + x_0\overline{x_1}\ x_2x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\text{KKNF}} &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x_0} + x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \\
&\cdot (x_0 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})
\end{aligned}
$$

(c) Da DKNF und KKNF äquivalent sind wird auf Basis der Wahrheitstabelle minimiert.

Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		x_1					
		0	1	1	0		
	0	0	1	1	1	0	
x_2	1	1	1	1	1	0	x_4
	1	0	1	0	0	1	
	0	1	0	1	0	1	
		0	0	1	1		
		x_3					

Daraus ergibt sich:

$$f_{\text{Min}}(x) = \overline{x_4} \cdot x_3 + \overline{x_4} \cdot x_1 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_1 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$

1.3

(a) DKNF:

$$\begin{aligned} f_{\text{DKNF}}(x) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned}$$

KKNF:

$$\begin{aligned} f_{\text{KKNF}}(x) &= (x_1 + x_2 + x_3) \\ &\quad \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \\ &\quad \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{DKNF}}(x) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot x_3) \\
&\quad + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})}} \\
&= \overline{\overline{(\overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3))} \cdot \overline{(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))}} \\
&= \overline{(x_1 + \overline{(x_2 + x_3)}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{(x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})})} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + (\overline{(x_2 \cdot x_3)} \cdot \overline{(\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})}))} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + ((\overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)))} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + (x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_3}))} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2})} \\
&= \overline{x_1 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3} \\
&\quad \overline{+ \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
&= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
&= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}} \cdot \overline{x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3} \cdot \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
&= (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
&= f_{\mathrm{KKNF}}(x)
\end{aligned}
$$

(c) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		x_2			
		1	1	0	0
x_1	0	1	1	1	0
	1	0	1	0	1
		0	1	1	0
		x_3			

Daraus ergibt sich:

$$f_{\mathrm{Min}}(x) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

(d) DKNF:

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{DKNF}}(x) \quad = \quad & (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
& +(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
& +(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
& +(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
& +(x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
& +(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)
\end{aligned}
$$

KKNF:

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{KKNF}}(x) \quad = \quad & (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \\
& \cdot(x_1 + x_2 + x_3)
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{DKNF}}(x) \quad = \quad & (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
& +(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
& +(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
& +(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
& +(x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
& +(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\
= \quad & \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
& +x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
= \quad & \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) + x_1 \\
= \quad & \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) + x_1}} \\
= \quad & \overline{\overline{(\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{(x_1 + \overline{(\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3})}) \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{(x_1 + (\overline{\overline{x_2} \cdot x_3} \cdot \overline{x_2 \cdot \overline{x_3}})) \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{(x_1 + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3)) \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{x_1 \cdot \overline{x_1} + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{(x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{(x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{(x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
= \quad & \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
= \quad & \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1})} \cdot \overline{(\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
= \quad & (\overline{x_2} + \overline{x_3} + x_1) \cdot (x_2 + x_3 + x_1) \\
= \quad & g_{\mathrm{KKNF}}(x)
\end{aligned}
$$

(f) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

			x_2		
		1	1	0	0
x_1	0	1	0	1	0
	1	1	1	1	1
		0	1	1	0
			x_3		

Daraus ergibt sich:

$$g_{\mathrm{Min}}(x) = x_1 + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}$$

2 Shannon Expansion

2.4

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0,0,0) \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0,0,1) \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0,1,0) \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0,1,1) \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1,0,0) \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1,0,1) \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1,1,0) \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1,1,1) \\
&= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 0 \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\
&= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0,0,0) \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0,0,1) \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0,1,0) \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0,1,1) \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1,0,0) \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1,0,1) \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1,1,0) \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1,1,1) \\
&= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\
&= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3
\end{aligned}
$$